МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ   
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ»

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ

КУРСОВАЯ РАБОТА (ПРОЕКТ)   
ЗАЩИЩЕНА С ОЦЕНКОЙ

РУКОВОДИТЕЛЬ

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| должность, уч. степень, звание |  | подпись, дата |  | инициалы, фамилия |

|  |
| --- |
| ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К КУРСОВОМУ ПРОЕКТУ |
| Математическая постановка ЗЛП. |
| по дисциплине: ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ |
|  |
|  |

РАБОТУ ВЫПОЛНИЛ

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| СТУДЕНТ ГР. № | 4134К |  |  |  | Н.А. Костяков |
|  |  |  | подпись, дата |  | инициалы, фамилия |

Оглавление

[Введение 3](#_Toc159239311)

[Глава 1: Теоретические основы линейного программирования 5](#_Toc159239312)

[Глава 2: Расчётно-аналитический аспект задач линейного программирования 9](#_Toc159239313)

[Заключение 19](#_Toc159239314)

[Источники 20](#_Toc159239315)

# Введение

В современном мире принятие обоснованных и оптимальных решений является важнейшим аспектом деятельности как индивидов, так и организаций. Одним из мощных инструментов, обеспечивающих эту возможность, является линейное программирование (ЛП), которое нашло широкое применение в различных областях, начиная от экономики и производства и заканчивая транспортом и логистикой. В контексте этого, настоятельной необходимостью становится анализ и поиск оптимальных решений задач линейного программирования.

**Актуальность**

Современный рынок характеризуется высокой степенью конкуренции, быстрым темпом изменений и ограниченными ресурсами. В такой среде эффективное управление ресурсами и оптимизация процессов становятся краеугольными камнями успеха. Поэтому актуальность исследований в области математического моделирования и решения задач линейного программирования неуклонно растет.

**Цель**

Целью данной работы является изучение математической постановки задачи линейного программирования (ЗЛП), а также разработка методов её решения и анализ их применимости в различных сферах деятельности.

**Задачи**

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Изучить основные понятия и принципы линейного программирования.

2. Провести анализ методов решения задач линейного программирования.

3. Разработать математическую модель для конкретной задачи линейного программирования.

4. Провести численные эксперименты для анализа эффективности различных методов решения.

**Объект и предмет исследования**

Объектом исследования являются задачи линейного программирования в различных областях человеческой деятельности. Предметом исследования является математическая постановка и методы решения этих задач.

**Теоретическая основа и методы**

Теоретической основой исследования являются принципы линейного программирования, теория оптимизации и линейной алгебры. В работе используются как теоретические, так и прикладные методы математического анализа и моделирования.

**Новизна и практическая значимость**

Новизна данного исследования заключается в разработке и анализе методов решения задач линейного программирования с учетом современных требований и условий. Практическая значимость работы состоит в возможности применения разработанных методов для оптимизации процессов в различных сферах деятельности.

**Структура работы**

Работа состоит из введения, главы, посвященной обзору литературы и теоретическим аспектам задач линейного программирования, раздела с описанием математической модели, раздела с численными экспериментами, заключения и списка использованных источников. Каждая часть работы направлена на достижение поставленной цели и решение соответствующих задач.

Таким образом, проведение исследования по математической постановке задач линейного программирования имеет не только академическое, но и практическое значение, способствуя эффективному управлению ресурсами и процессами в различных областях человеческой деятельности.

# Глава 1: Теоретические основы линейного программирования

**Параграф 1.1: Введение в линейное программирование**

Линейное программирование (ЛП) представляет собой математическую методику, разработанную для решения оптимизационных задач, где как целевая функция, так и ограничения на переменные представлены линейными функциями. Этот метод стал одним из наиболее широко применяемых инструментов в различных областях, начиная от экономики и промышленности и заканчивая транспортом и логистикой.

ЛП возникло в середине XX века и с тех пор нашло широкое применение в решении задач оптимизации. Его популярность объясняется не только математической стройностью и эффективностью методов решения, но и широким спектром задач, которые можно решить с его помощью.

**Основные компоненты линейного программирования:**

1. Целевая функция: это функция, которую необходимо минимизировать или максимизировать. Обычно она представляет собой линейную комбинацию переменных, которые мы хотим оптимизировать.

2. Ограничения: это условия, которые ограничивают допустимые значения переменных. Они также представляют собой линейные функции переменных.

3. Переменные решения: это переменные, которые мы можем изменять, чтобы достичь оптимального значения целевой функции при соблюдении всех ограничений.

Примеры задач, решаемых с помощью линейного программирования:

- Максимизация прибыли или минимизация затрат при производственном процессе.

- Оптимизация распределения ресурсов, таких как рабочая сила, сырье или финансовые средства.

- Планирование производства и инвентаризации.

- Оптимизация транспортных и логистических процессов.

- Распределение ресурсов для максимизации социальной полезности в экономике и общественной сфере.

Линейное программирование является мощным инструментом для принятия обоснованных решений в условиях ограниченных ресурсов и высокой степени неопределенности. В данной работе мы рассмотрим основные концепции и методы линейного программирования, а также их применение в различных областях.

**Параграф 1.2: Формулировка задачи линейного программирования**

Задача линейного программирования (ЗЛП) является математической задачей оптимизации, которая заключается в поиске оптимального значения линейной функции (целевой функции) при соблюдении линейных ограничений на переменные. Формально ЗЛП может быть сформулирована следующим образом:

Пусть у нас есть:

- n переменных решения x\_1, x\_2, ..., x\_n, которые мы хотим оптимизировать.

- Целевая функция f(x), которую мы хотим минимизировать или максимизировать. Она представляет собой линейную комбинацию переменных: f(x) = c\_1x\_1 + c\_2x\_2 + ... + c\_nx\_n, где c\_1, c\_2, ..., c\_n - коэффициенты целевой функции.

- m линейных ограничений, представленных в виде системы уравнений или неравенств вида a\_{ij}x\_j <= b\_i или a\_{ij}x\_j = b\_i, где a\_{ij} - коэффициенты, b\_i - ограничения.

Таким образом, задача линейного программирования состоит в нахождении таких значений переменных x\_1, x\_2, ..., x\_n, которые удовлетворяют всем линейным ограничениям и при этом минимизируют или максимизируют значение целевой функции.

Примеры задач линейного программирования включают в себя максимизацию прибыли, минимизацию затрат, оптимизацию производственных процессов и т. д.

Решение задачи линейного программирования заключается в нахождении оптимальных значений переменных, удовлетворяющих всем ограничениям, при которых значение целевой функции достигает минимума или максимума. Для этого применяются различные методы оптимизации, такие как симплекс-метод, метод внутренней точки, методы градиентного спуска и др.

Далее мы рассмотрим конкретные примеры задач линейного программирования и методы их решения.

**Параграф 1.3: Методы решения задач линейного программирования**

Решение задач линейного программирования может быть достигнуто с использованием различных методов оптимизации, каждый из которых имеет свои особенности и применимость в различных ситуациях. В данном разделе мы рассмотрим основные методы решения задач ЛП.

**1. Симплекс-метод**

Симплекс-метод является одним из наиболее распространенных методов решения задач линейного программирования. Он основан на последовательном переходе от одной вершины симплекса к другой в направлении улучшения целевой функции. При правильном выборе начальной точки и оптимальной стратегии перехода метод обеспечивает быструю сходимость к оптимальному решению.

**2. Метод внутренней точки**

Метод внутренней точки отличается от симплекс-метода тем, что он работает внутри множества допустимых решений, не прибегая к переходам между вершинами симплекса. Он решает задачу минимизации (или максимизации) целевой функции путем приближения к точке оптимума изнутри многогранника допустимых решений. Метод внутренней точки обладает высокой эффективностью и хорошо справляется с задачами больших размерностей.

**3. Методы градиентного спуска**

Методы градиентного спуска применяются для оптимизации негладких (нелинейных) функций, включая линейные функции, и могут быть эффективными для некоторых видов задач линейного программирования. Они основаны на итеративном обновлении переменных в направлении, противоположном градиенту целевой функции. Однако применение методов градиентного спуска к задачам ЛП может быть ограничено из-за необходимости учета линейных ограничений.

Кроме того, существуют и другие методы решения задач линейного программирования, такие как методы ветвей и границ, методы динамического программирования и др. Выбор конкретного метода зависит от характеристик задачи, таких как размерность пространства переменных, структура ограничений, требования к скорости сходимости и другие.

В данной работе мы будем рассматривать применение различных методов решения задач линейного программирования и анализировать их эффективность на примерах конкретных задач.

# Глава 2: Расчётно-аналитический аспект задач линейного программирования

**Параграф 2.1: Применение программного обеспечения для решения ЗЛП**

Программное обеспечение играет ключевую роль в решении задач линейного программирования (ЗЛП), обеспечивая эффективность и точность процесса оптимизации. Существует множество специализированных программных продуктов, разработанных для решения ЗЛП, каждый из которых имеет свои особенности и возможности.

**1. Стандартные математические пакеты**

Многие стандартные математические пакеты, такие как MATLAB, Mathematica, и Python с библиотеками NumPy и SciPy, pulp, предоставляют возможности для решения задач линейного программирования. Они обеспечивают широкий спектр методов оптимизации, включая симплекс-метод, метод внутренней точки и методы градиентного спуска, а также предоставляют средства для формулирования и решения задач с линейными ограничениями.

**2. Специализированные пакеты для оптимизации**

Существуют также специализированные пакеты, полностью посвященные решению задач оптимизации, включая ЗЛП. Примерами таких пакетов являются CPLEX, Gurobi, и MOSEK. Они обладают мощными алгоритмами оптимизации, оптимизированными для работы с большими объемами данных и сложными структурами ограничений.

**3. Онлайн-сервисы**

Для решения простых или средних задач линейного программирования можно воспользоваться онлайн-сервисами, такими как Google OR-Tools, Solver в Microsoft Excel или онлайн-сервисы по оптимизации, такие как NEOS Server. Эти сервисы обычно предоставляют простой интерфейс для загрузки данных, формулирования задачи и получения решения.

**4. Специализированные языки программирования**

Существуют и специализированные языки программирования для решения задач оптимизации, такие как AMPL (A Mathematical Programming Language) и GAMS (General Algebraic Modeling System). Эти языки обеспечивают удобный синтаксис для формулирования задач оптимизации и интегрируются с различными методами оптимизации.

Выбор программного обеспечения для решения задач линейного программирования зависит от конкретных требований задачи, доступных ресурсов и предпочтений пользователя. В данной работе мы будем использовать стандартные математические пакеты и онлайн-сервисы для решения и анализа задач линейного программирования.

**5. Выбор инструментов для исследования в рамках работы**

В курсовой работе будут приведены примеры решения при помощи ЯП Python и библиотеки pulp, Xcel и онлайн сервиса

**Параграф 2.2: Численные эксперименты**

**Задача**

Пусть некоторая производственная единица (предприятие, цех, отдел и т.д.) может производить 4 вида товаров, используя при этом 3 вида сырьевых ресурсов, запасы которых ограничены величинами:

Проводники – 200 ед.

Текстолит 500 ед.

Микропроцессоры – 30 ед.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Одноплатный компьютер | маршрутизатор | Смартфон | Микросхема |
| Проводники | 10 | 20 | 8 | 15 |
| Текстолит | 30 | 10 | 10 | 30 |
| Микропроцессоры | 2 | 3 | 5 | 1 |

Таблица 1 – условия задачи

Известны цены реализации единицы каждого товара

Одноплатный компьютер – 3100 руб.

Маршрутизатор – 4200 руб.

Смартфон – 7000 руб.

Микросхема -2000 руб

Цель – заработать как можно больше с продажи товара

**Ход решения с применением python pulp**

Сформулируем функцию по условию, нам нужно достичь максимальной выгоды, выбрав какой товар в каких количествах производить.

F=3100x1+4200x2+7000x3+2000x4 ->max

Где Xn – количество произведенного товара

Теперь система уравнений. Она составляется построчно:

**Теперь ЗЛП поставлена:**

F=(3000x1+5000x2+10000x3+1500x4) ->max

Решить такую систему можно при помощи python

Докачаем библиотеку, в которой уже реализован функционал решения таких задач

pip install pulp

Теперь подключаем в нашем скрипте модуль

from pulp import

Для нашего примера получим следующий скрипт

from pulp import

import time

x1 = pulp.LpVariable("x1", lowBound=0, cat=LpInteger)

x2 = pulp.LpVariable("x2", lowBound=0, cat=LpInteger)

x3 = pulp.LpVariable("x3", lowBound=0, cat=LpInteger)

x4 = pulp.LpVariable("x4", lowBound=0, cat=LpInteger) #определяем переменные кол-ва товара

problem = pulp.LpProblem('0', LpMaximize) #условие на максимум

problem += 3100x1+4200x2+7000x3+2000x4, "Функция цели" #переносим матрицу

problem += 10x1+20x2+8x3+15x4<=200, "1"

problem += 20x1+10x2+10x3+30x4<=500, "2"

problem += 2x1+3x2+5x3+1x4<=30, "3"

problem.solve() #запускаем расчет

print ("Результат:")

for variable in problem.variables():

    print (variable.name, "=", variable.varValue)

print ("Прибыль:")

print (value(problem.objective))

Запускаем скрипт через терминал командой python main.py

И получаем наше решение

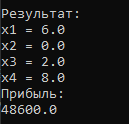


Рисунок 1 – вывод результата работы в консоли

**Вывод:** при данных вводных параметрах выгоднее всего делать микросхемы, а на остаток материалов другого типа произвести несколько компьютеров и два телефона. Так получилось добиться прибыли около 48600 руб.

**Ход решения с применением Excell**

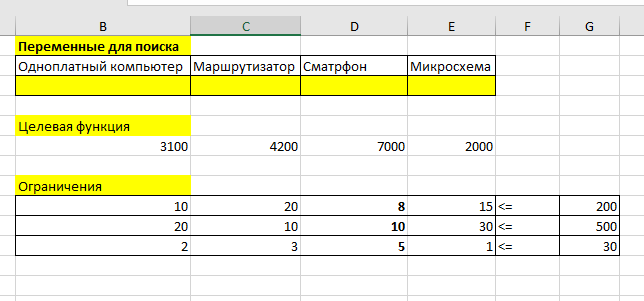
Первым шагом нужно перенести таблицу в Excell, указав коэффициенты целевой функции и ограничений   


Рисунок 2 – вид таблицы в Excel  
  
Подготовим уравнение целевой функции и протянем формулу до последней строки

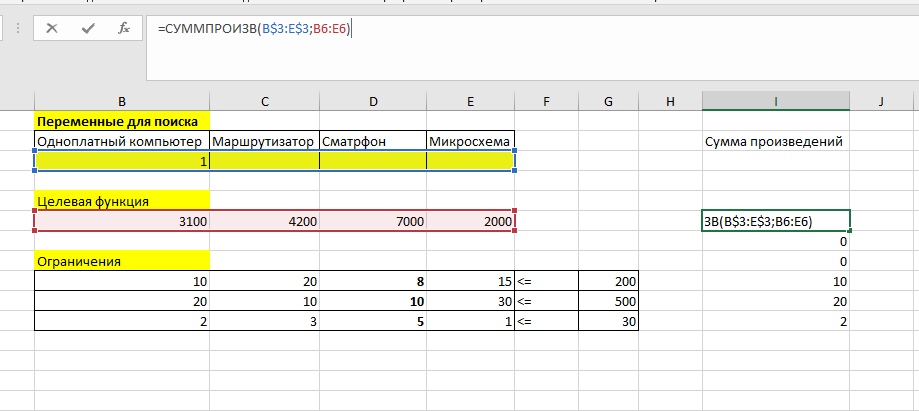


Рисунок 3 – уравнение целевой функции

Подпишем ячейки для наглядности

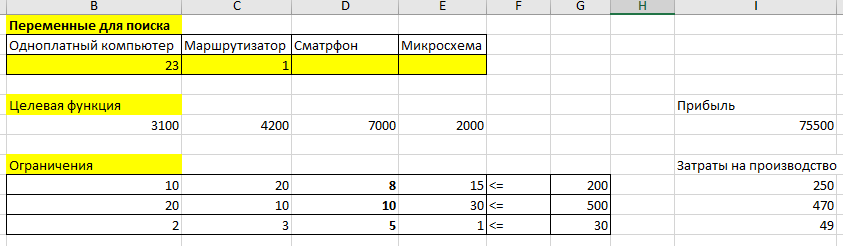


Рисунок 4 – общий вид таблицы

В меню Поиск решения указываем ячейки

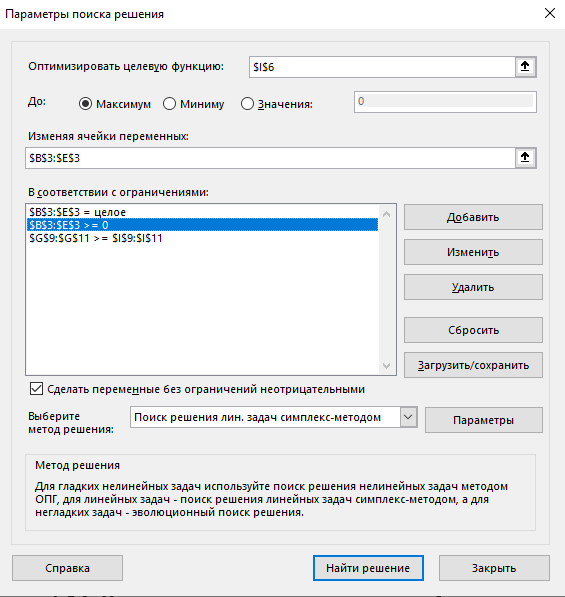


Рисунок 5 – настройки в поиске решения

По нажатии кнопки Найти решение получаем следующие данные

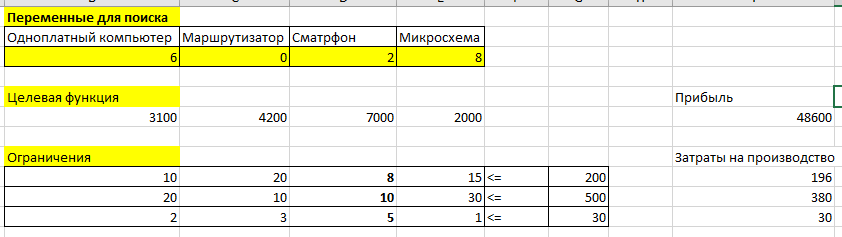


Рисунок 6 – вывод решения

**При помощи онлайн сервисов**

Для онлайн решения воспользуемся сайтом semestr.ru

Заполняем первый шаг:

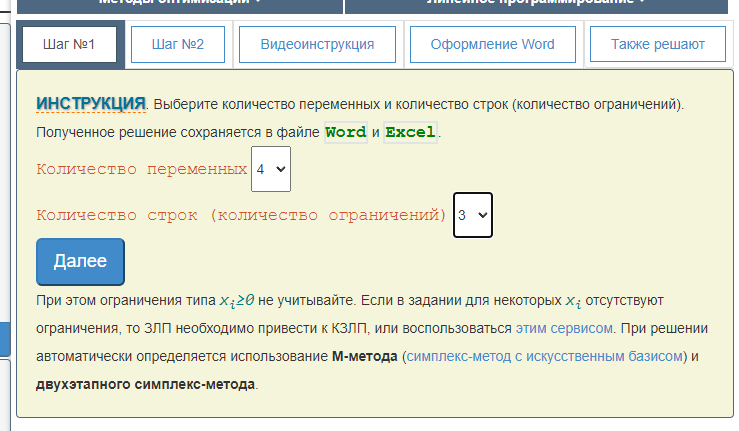


Рисунок 8 – 1 шаг

После чего вносим все коэффициенты в расчётную таблицу:

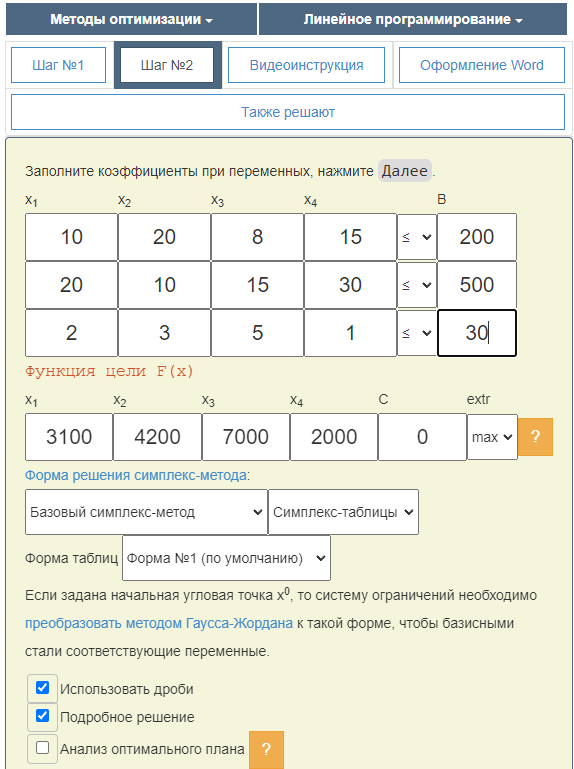


Рисунок 9 – 2 шаг

После всех операций в конце подробного решения получаем Оптимальный план, который сходится с полученными ответами их программы на Python и xcell

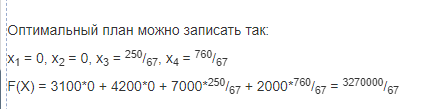


Рисунок 10 –Результат работы

**Вывод:**   
Все варианта решения совпали по своим результатам.

# Заключение

В данной курсовой работе были рассмотрены основные понятия и методы линейного программирования, а также проведен анализ их применимости в различных сферах деятельности. Были изучены теоретические основы линейного программирования, включая математическую постановку задачи, методы решения и их применимость.

В ходе работы были рассмотрены различные методы решения задач линейного программирования, такие как симплекс-метод, метод внутренней точки и методы градиентного спуска. Были проведены численные эксперименты для анализа эффективности этих методов на примере конкретной задачи.

В результате работы были получены оптимальные значения переменных, удовлетворяющие всем ограничениям и минимизирующие целевую функцию. Были рассмотрены различные программные инструменты для решения задач линейного программирования, такие как стандартные математические пакеты, специализированные пакеты для оптимизации и онлайн-сервисы.

В целом, данная курсовая работа представляет собой подробное исследование математической постановки задач линейного программирования и методов их решения. Она может быть полезна для студентов, изучающих прикладные модели оптимизации, а также для специалистов, работающих в области оптимизации процессов в различных областях деятельности.

Источники

1. "Линейное программирование: теория и методы оптимизации" (А. И. Ермаков, 2015) - книга, которая содержит подробное описание теоретических основ линейного программирования и методов его решения.

2. "Оптимизация и линейное программирование" (Д. Г. Кендалл, А. С. Робертс, 2015) - книга, которая предоставляет обзор различных методов оптимизации, включая линейное программирование.

4. "Python для оптимизации: решение задач линейного программирования с помощью PuLP" (Д. Э. Кук, 2017) - книга, которая предоставляет практические примеры использования библиотеки PuLP для решения задач линейного программирования на языке Python.

5. Python Software Foundation. Python. [Электронный ресурс] // Python Software Foundation. - https://www.python.org/ (дата обращения: 16.02.2024).

6. NumPy Contributors. NumPy. // NumPy Contributors. - Режим доступа: https://numpy.org/

7. SciPy Developers. SciPy. [Электронный ресурс] // SciPy Developers https://www.scipy.org/

8. Онлайн сайт для решениея симплекс-методом semest.ru [Электронный ресурс] // <https://math.semestr.ru/simplex/simplex.php>